第 82 页：（4-27）式

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)du = \vartheta[\mu + \sigma\frac{\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}] \qquad (4\text{-}27)$$

其中，ϑ 表示投资组合价值，$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})$ 是标准正态密度函数。因此根据式子（4-27），只要知道资产组合损失率的均值和标准差，我们就可以计算出资产组合的预期亏损值。

以下为扫描显示的证明过程

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left[\sigma\Phi^{-1}(u) + \mu\right]du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \sigma\Phi^{-1}(u)du + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \sigma\Phi^{-1}(u)du + \mu \end{aligned} \qquad (4\text{-}27)$$

采用替换变量，令 $u = \Phi(y)$ 和 $y = \Phi^{-1}(u)$，其中，$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})$ 是标准正态密度函数，故此，可以得到：

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^1 \sigma\Phi^{-1}(u)du = \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\Phi^{-1}(1)} \sigma\phi(y)\Phi^{-1}\left(\Phi(y)\right)dy = \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \sigma\phi(y)\Phi^{-1}\left(\Phi(y)\right)dy \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \sigma\phi(y)ydy = \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\sigma y}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} -y\exp(-\frac{y^2}{2})dy = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp(-\frac{y^2}{2})\right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2}{2}) = \sigma\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right) \end{aligned} \qquad (4\text{-}28)$$

结合（4-27）式和（4-28）式，可以求出 $ES_\alpha = \mu + \sigma\frac{\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}$，同时，可以得到投资组合的 ES 为：

$$ES_\alpha = \vartheta[\mu + \sigma\frac{\phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha}] \qquad (4\text{-}29)$$

第 85 页：（4-35）式

$$ES_\alpha(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_\alpha^1 t_n^{-1}(u)du = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{(n-2)}}p_n\left(t_n^{-1}(\alpha)\right)\left(\frac{n+\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}\right) \qquad (4\text{-}35)$$

以下为扫描显示的证明过程

$$ES_{\alpha}(X)=\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_{\alpha}^{1}t_n^{-1}(u)du \tag{4-35}$$

为了求解式（4-35），令 $k=t_n^{-1}(u)$，则有 $u=t_n(k)$，因此，式（4-35）可改写为：

$$ES_{\alpha}(X)=\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_{\alpha}^{1}kd\left(t_n(k)\right) \tag{4-36}$$

由于 T 分布的概率密度函数为：

$$p_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}=d\left(t_n(k)\right) \tag{4-37}$$

则式（4-35）可以进一步写成：

$$ES_{\alpha}(X)=\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{(n-2)\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{t_n^{-1}(\alpha)}^{+\infty}k\left(1+\frac{k^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}dk \tag{4-38}$$

为了求解式（4-38），令 $z=1+\frac{k^2}{n}$，则式（4-38）中的积分下限可以写为 $1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}$，故此，式（4-38）可以改写为：

$$ES_{\alpha}(X)=\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{(n-2)\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{n}{2}\int_{1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}}^{+\infty}z^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}dz \tag{4-39}$$

积分项 $\frac{n}{2}\int_{1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}}^{+\infty}z^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}dz$ 可求解如下（注意 T 分布的自由度 $n>2$）：

$$\frac{n}{2}\left[\frac{z^{\frac{1-n}{2}}}{\frac{1-n}{2}}\right]_{z=1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}}^{z\to+\infty}=0-\frac{n}{1-n}\left(1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}=\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}} \tag{4-40}$$

因此式（4-39）求解结果为：

$$ES_{\alpha}(X)=\mu+\frac{\sigma}{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{(n-2)}}p_n\left(t_n^{-1}(\alpha)\right)\left(\frac{n+\left(t^{-1}(\alpha)\right)^2}{n}\right) \tag{4-41}$$

第 238 页：

令：

$$\text{Min}_w\frac{1}{2}w'\sum w$$

$$\text{s.t. } \mu_0 = w'\mu, w'l = 1, l' = [1,1,\ldots,1] \tag{11-2}$$

其中，μ_0 表示投资者的期望收益率。

通过构建拉格朗日函数，求最优解可得最优投资组合权重：

$$w = \lambda\Sigma^{-1}l + \gamma\sum^{-1}\mu \qquad \text{（11-3）}$$

其中，$\lambda = \dfrac{C-\mu_0 B}{\Delta}, \gamma = \dfrac{\mu_0 A - B}{\Delta}$， $A = l'\Sigma^{-1}l, B = l'\Sigma^{-1}\mu, C = \mu'\Sigma^{-1}\mu, \Delta = |AC - BB|$。

$$\sigma_0^2 = w'\Sigma w = \frac{A\mu_0^2 - 2B\mu_0 + C}{\Delta} \qquad \text{（11-4）}$$

以下为扫描显示的证明过程

构建拉格朗日函数：

$$L = \frac{1}{2}w'\sum w + \lambda\left(1 - w'l\right) + \gamma\left(\mu_0 - w'\mu\right) \tag{11-3}$$

求解：

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \sum w - \lambda l - \gamma\mu = 0 \Rightarrow w = \lambda\Sigma^{-1}l + \gamma\sum^{-1}\mu \tag{11-4}$$

代入约束条件：

$$\begin{aligned} l'w &= \lambda l'\Sigma^{-1}l + \gamma l'\sum^{-1}\mu = 1 \\ \mu'w &= \lambda\mu'\Sigma^{-1}l + \gamma\mu'\Sigma^{-1}\mu = \mu_0 \end{aligned} \tag{11-5}$$

将（11-5）式改写为矩阵形式，可得：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \tag{11-6}$$

其中，

$$A = l'\Sigma^{-1}l, B = l'\Sigma^{-1}\mu, C = \mu'\Sigma^{-1}\mu, \Delta = |AC - BB| \tag{11-7}$$

由（11-6）式可得

$$\lambda = \frac{C - \mu_0 B}{\Delta}, \gamma = \frac{\mu_0 A - B}{\Delta} \tag{11-8}$$

将（11-4）（11-6）（11-8）式代入 $\sigma_0^2 = \varpi'\sum\varpi$ 中，可得

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= w'\Sigma w \\ &= (\lambda\Sigma^{-1}l + \gamma\Sigma^{-1}\mu)'\Sigma\left(\lambda\Sigma^{-1}l + \gamma\Sigma^{-1}\mu\right) \\ &= A\lambda^2 + 2B\lambda\gamma + C\gamma^2 \end{aligned} \tag{11-9}$$

$$=\left(\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}\right)^2 A+2\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}B+\left(\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}\right)^2 C$$

$$=\left[\left(\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}\right)^2 A+\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}B\right]+\left[\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}B+\left(\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}\right)^2 C\right]$$

$$=\frac{(C-\mu_0 B)(AC-B^2)}{\Delta^2}+\frac{(\mu_0 A-B)(AC\mu_0-B^2\mu_0)}{\Delta^2}$$

$$=\frac{(AC-B^2)(A\mu_0^2-2B\mu_0+C)}{\Delta^2}$$

$$=\frac{A\mu_0^2-2B\mu_0+C}{\Delta}$$

第 240 页：

令期望收益最大化服从约束条件：

$$\mathrm{Max}_w\, w'\mu \tag{11-16}$$

$$s.t. w'\Sigma w=\sigma_0^2, w'l=1, l'=[1,1,\ldots,1] \tag{11-17}$$

其中，μ 为 n 种风险资产的期望收益率，这便是期望收益最大化的模型。

通过构建拉格朗日函数，求最优解可得最优投资组合权重：

$$w=\frac{1}{\mp\sqrt{\dfrac{AC-B^2}{A\sigma_0^2-1}}}\left[\Sigma^{-1}\mu-\left(\frac{B}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{AC-B^2}{A\sigma_0^2-1}}\right)\Sigma^{-1}l\right] \tag{11-18}$$

以下为扫描显示的证明过程

构建拉格朗日函数：

$$L=w'\mu+\lambda(1-w'l)+\gamma(\sigma_0^2-w'\Sigma w) \tag{11-18}$$

最优化偏导等于零，可得：

$$\frac{\partial L}{\partial w}=\mu-\lambda l-2\gamma\Sigma w=0 \tag{11-19}$$

求得：

$$w=\frac{1}{2\gamma}(\Sigma^{-1}\mu-\lambda\Sigma^{-1}l) \tag{11-20}$$

代入约束条件可得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\gamma}(l'\Sigma^{-1}\mu-\lambda l'\Sigma^{-1}l)=1\\ \dfrac{1}{4\gamma^2}(\mu'\Sigma^{-1}-\lambda l'\Sigma^{-1})\sum(\Sigma^{-1}\mu-\lambda\Sigma^{-1}l)=\sigma_0^2\end{cases} \tag{11-21}$$

由（11-21）式，可得，

$$\mu'\Sigma^{-1}\mu - 2\lambda\mu'\Sigma^{-1}l + \lambda^2 l'\Sigma^{-1}l = 4\gamma^2\sigma_0^2 \tag{11-22}$$

令

$$A = l'\Sigma^{-1}l, B = \mu'\Sigma^{-1}l, C = \mu'\Sigma^{-1}\mu \tag{11-23}$$

可得：

$$\lambda^2 A - 2B\lambda + C - 4\gamma^2\sigma_0^2 = 0 \tag{11-24}$$

同时，代入 (11-21) 式，可得：

$$B - \lambda A = 2\gamma \tag{11-25}$$

结合上述（11-24）式和（11-25）式，可求得：

$$\lambda^2 A - 2B\lambda + C - (B - \lambda A)^2\sigma_0^2 = 0 \tag{11-26}$$

可进一步改写为：

$$\left(A - A^2\sigma_0^2\right)\lambda^2 + 2B\left(A\sigma_0^2 - 1\right)\lambda + C - B^2\sigma_0^2 = 0 \tag{11-27}$$

求解可得：

$$\lambda = \frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{\frac{AC - B^2}{A\sigma_0^2 - 1}}, \left(A\sigma_0^2 - 1 > 0\right) \tag{11-28}$$

代入（11-25）式，可得：

$$\gamma = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{AC - B^2}{A\sigma_0^2 - 1}} \tag{11-29}$$

将（11-28）式和 (11-29) 式代入（11-20）式，可得最优投资组合权重向量的表达式：

$$w = \frac{1}{\mp\sqrt{\frac{AC - B^2}{A\sigma_0^2 - 1}}}\left[\Sigma^{-1}\mu - \left(\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{\frac{AC - B^2}{A\sigma_0^2 - 1}}\right)\Sigma^{-1}l\right] \tag{11-30}$$

第 241 页：

同样的，令最大化期望效用目标模型和约束条件为：

$$\mathrm{Max}_w\, w'\mu - \frac{1}{2}\gamma w'\Sigma w \tag{11-31}$$

$$s.t. w'l = 1, l' = [1, 1, \ldots, 1] \tag{11-32}$$

通过构建拉格朗日函数，求最优解可以得到最优投资组合权重：

$$w = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\lambda} + \frac{\lambda - l'\Sigma^{-1}\mu}{l'\Sigma^{-1}l}\frac{\Sigma^{-1}l}{\lambda} \tag{11-33}$$

以下为扫描显示的证明过程

构建拉格朗日函数：

$$L = w'\mu - \frac{1}{2}\gamma w'\Sigma w + \lambda\left(1 - w'l\right) \quad (11\text{-}33)$$

求导：

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \mu - \gamma\Sigma w - \lambda l = 0 \quad (11\text{-}34)$$

求得：

$$w = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\lambda} - \frac{\gamma\Sigma^{-1}l}{\lambda} \quad (11\text{-}35)$$

代入约束条件（$l'w = 1$），可得：

$$\frac{l'\Sigma^{-1}\mu}{\lambda} - \frac{\gamma l'\Sigma^{-1}l}{\lambda} = 1 \quad (11\text{-}36)$$

进一步可改写得到：

$$\gamma = \frac{l'\Sigma^{-1}\mu - \lambda}{l'\Sigma^{-1}l} \quad (11\text{-}37)$$

故此， 最优投资组合权重向量可以被简洁地写为：

$$w = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\lambda} + \frac{\lambda - l'\Sigma^{-1}\mu}{l'\Sigma^{-1}l}\frac{\Sigma^{-1}l}{\lambda} \quad (11\text{-}38)$$

第 242 页：

$$\min_{w_R} \frac{1}{2} w_R' \sum w_R \quad (11\text{-}39)$$

$$s.t.\mu_0 = w_R'\mu + \left(1 - w_R'l\right)R_f \quad (11\text{-}40)$$

通过构建拉格朗日函数，求最优解可得最小化方差目标下的最优投资组合权重：

$$w_R = \frac{\mu_0 - R_f}{(\mu_0 - lR_f)'\Sigma^{-1}(\mu - lR_f)}\Sigma^{-1}(\mu - lR_f) \quad (11\text{-}41)$$

以下为扫描显示的证明过程

构建拉格朗日函数：

$$L = \frac{1}{2} w_R'\Sigma w_R + \lambda\left[\mu_0 - w_R'\mu - \left(1 - w_R'l\right)R_f\right] \quad (11\text{-}41)$$

求解得：

$$\frac{\partial L}{\partial w_R'} = \Sigma w_R - \lambda\left(\mu - lR_f\right) = 0$$
$$\Rightarrow w_R = \lambda\Sigma^{-1}\left(\mu - lR_f\right) \quad (11\text{-}42)$$

代入约束条件：

$$w_R'\left(\mu - lR_f\right) = \mu_0 - R_f \quad (11\text{-}43)$$

解得：

$$\lambda=\frac{\mu_0-R_f}{(\mu-lR_f)'\Sigma^{-1}(\mu-lR_f)} \tag{11-44}$$

由此可得最小化方差目标下的最优投资组合权重：

$$w_R=\frac{\mu_0-R_f}{(\mu_0-lR_f)'\Sigma^{-1}(\mu-lR_f)}\Sigma^{-1}(\mu-lR_f) \tag{11-45}$$

第 269 页：

$$\frac{\partial \mathrm{VaR}(H)}{\partial h}=E(R_F)+\Phi^{-1}(\alpha)\frac{h\sigma_F^2-\sigma_{PF}}{\sqrt{\sigma_P^2+h^2\sigma_F^2-2h\sigma_{PF}}}=0 \tag{12-22}$$

$$\Rightarrow h^2-\frac{2\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}h-\frac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_{PF}^2-\sigma_P^2E(R_F)^2}{\sigma_F^2\left[E(R_F)^2-\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2\right]}=0 \tag{12-23}$$

求解可得最优套期保值比率为：

$$h^*=\rho\frac{\sigma_P}{\sigma_F}-\frac{E(R_F)\sigma_P}{\sigma_F}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2-E(R_F)^2}} \tag{12-24}$$

以下为扫描显示的证明过程

对（12-23）式求解得到：

$$h=\frac{\dfrac{2\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}\pm\sqrt{\dfrac{4\sigma_{FF}^2}{\sigma_F^4}+4\dfrac{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_{PF}^2-\sigma_P^2E(R_F)^2}{\sigma_F^2\left[E(R_F)^2-\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2\right]}}}{2} \tag{12-24}$$

$$=\frac{\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}\pm\frac{E(R_F)}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2}}$$

$$\frac{\partial^2 VaR(H)}{\partial h^2}=\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma_F^2\sigma_P^2(1-\rho^2)}{(\sigma_P^2+h^2\sigma_F^2-2h\sigma_{PF})^{\frac{3}{2}}}\ge 0 \tag{12-25}$$

因为$|\rho|\le 1$，则：

$$VaR(H_1)-VaR(H_2)=\frac{2E(R_F)^2}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2}}\ge 0 \tag{12-26}$$

故此，由一阶偏导等于零，二阶偏导大于零可知在$h^*=h_2$处可使得 VaR 取得极小值，此时，最优套期保值比率为：

$$h^*=h_2=\frac{\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}-\frac{E(R_F)}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2}} \tag{12-27}$$

因为 $\sigma_{PF}=\rho\sigma_F\sigma_P$，则有：

$$h^{*}=\rho\frac{\sigma_P}{\sigma_F}-\frac{E(R_F)\sigma_P}{\sigma_F}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\left[\Phi^{-1}(\alpha)\right]^2\sigma_F^2-E(R_F)^2}} \quad (12\text{-}28)$$

第 272 页：

$$\frac{\partial ES}{\partial h}=E(R_F)+k_\alpha\frac{h\sigma_F^2-\sigma_{PF}}{\sqrt{\sigma_P^2+h^2\sigma_F^2-2h\sigma_{PF}}}=0 \quad (12\text{-}32)$$

$$\Rightarrow h^2-\frac{2\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}h-\frac{\sigma_P^2E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_{PF}^2}{\sigma_F^2\left[E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_F^2\right]}=0 \quad (12\text{-}33)$$

求解可得：

$$h_{ES}^{*}=\rho\frac{\sigma_P}{\sigma_F}-\frac{E(R_F)\sigma_P}{\sigma_F}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{[k_\alpha]^2\sigma_F^2-E(R_F)^2}} \quad (12\text{-}34)$$

以下为扫描显示的证明过程

对（12-33）式求解得到：

$$h=\frac{\frac{2\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}\pm\sqrt{\frac{4\sigma_{PF}^2}{\sigma_F^4}+4\frac{\sigma_P^2E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_{PF}^2}{\sigma_F^2\left[E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_F^2\right]}}}{2}$$
$$=\frac{\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}\pm\frac{E(R_F)}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_F^2}} \quad (12\text{-}34)$$

因为$|\rho|\le 1$，则：

$$\frac{\partial^2 ES}{\partial h^2}=-k_\alpha\frac{\sigma_F^2\sigma_P^2(1-\rho^2)}{\left(\sigma_P^2+h^2\sigma_F^2-2h\sigma_{PF}\right)^{\frac{3}{2}}}\ge 0 \quad (12\text{-}35)$$

$$ES(h_1)-ES(h_2)=\frac{2E(R_F)^2}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_F^2}}\ge 0 \quad (12\text{-}36)$$

故此，最优套期保值比率为：

$$h_{ES}^{*}=h_2=\frac{\sigma_{PF}}{\sigma_F^2}-\frac{E(R_F)}{\sigma_F^2}\sqrt{\frac{\sigma_{PF}^2-\sigma_F^2\sigma_P^2}{E(R_F)^2-[k_\alpha]^2\sigma_F^2}} \quad (12\text{-}37)$$

又因为$\sigma_{PF}=\rho\sigma_F\sigma_P$，则：

$$h_{ES}^{*}=\rho\frac{\sigma_P}{\sigma_F}-\frac{E(R_F)\sigma_P}{\sigma_F}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{[k_\alpha]^2\sigma_F^2-E(R_F)^2}} \quad (12\text{-}38)$$

第 308 页：

$$df = \ln S_T - \ln S_t \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \tag{14-22}$$

由此可以证明得到对于一个无股息股票看涨期权的布莱克-斯科斯斯-莫顿定价公式：

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}[\max(S_T - X, 0)] = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{14-23}$$

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，$d_2 = \dfrac{\ln(S/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$。

以下为扫描显示的证明过程

证明：令 $m = \hat{E}(\ln S_T) = \ln S_t + (\mu - \dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)$，$s = \sqrt{\mathrm{var}(\ln S_T)} = \sigma\sqrt{T-t}$，由此可得：

$W = \dfrac{\ln S_T - m}{s} \sim N(0,1)$。基于上述设定，我们可以求得衍生产品价格的期望：

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= \int_0^\infty S_T h(S_T) dS_T = \int_{-\infty}^\infty e^{\ln S_T} h(\ln S_T) d\ln S_T \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{sW+m} h(W) dW = \int_{-\infty}^\infty e^{sW+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW = \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{s^2}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-s)^2}{2}} dW \\
&= e^{\frac{s^2}{2}+m} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-s)^2}{2}} dW \\
&= e^{\frac{s^2}{2}+m} = e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} = e^{\ln S_t + \mu(T-t)} \\
&= S_t e^{\mu(T-t)}
\end{aligned} \tag{14-23}$$

同时，结合衍生产品价格的方差公式：$Var(S_T) = E(S_T^2) - \left(E(S_T)\right)^2$，因为：

$$\begin{aligned}
E(S_T^2) &= \int_0^\infty S_T^2 h(S_T) dS_T = \int_{-\infty}^\infty e^{2\ln S_T} h(\ln S_T) d\ln S_T \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{2sW+2m} h(W) dW = \int_{-\infty}^\infty e^{2sW+2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW = \int_{-\infty}^\infty e^{2s^2+2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-2s)^2}{2}} dW \\
&= e^{2s^2+2m} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-2s)^2}{2}} dW \\
&= e^{2s^2+2m} = e^{2\sigma^2(T-t)+2\ln S_t + 2(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} = e^{2\ln S_t + 2(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \\
&= S_t^2 e^{2(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}
\end{aligned} \tag{14-24}$$

故此，衍生产品价格的方差为：

$$Var(S_T) = S_t^2 e^{2(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - \left(S_t e^{\mu(T-t)}\right)^2 = S_t^2 e^{2\mu(T-t)}[e^{\sigma^2(T-t)} - 1] \tag{14-25}$$

基于上述设定，我们可以进一步推出看涨期权价格的定价公式。设定在关于 dz 风险中性的世界中，欧式看涨期权的价格 c 等于其期望值按无风险利率贴现的现值：

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \tag{14-26}$$

其中 $\hat{E}(\cdot)$ 表示风险中性世界中的期望值；同时， 在此风险中性世界中，期权到期 T 时刻标的资产价格 S_T 服从如下的对数正态分布：

$$\ln S_T \sim \phi[\ln S_t + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t}] \tag{14-27}$$

令 $W = \dfrac{\ln S_T - m}{s}$，其中，$m = \hat{E}(\ln S_T) = \ln S + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), s = \sqrt{\operatorname{var}(\ln S_T)} = \sigma\sqrt{T-t}$，

显然，$W \sim N(0,1)$，而且，随机变量 W 的密度函数 $h(W)$ 为 $h(W) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-W^2}{2}}$。

$$\begin{aligned}
\hat{E}[\max(S_T - K, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(S_T - K, 0) h(S_T) dS_T \\
&= \int_{K}^{\infty} (S_T - K) h(S_T) dS_T + \int_{-\infty}^{K} 0 h(S_T) dS_T \\
&= \int_{\ln K}^{\infty} (e^{\ln S_T} - K) h(\ln S_T) d(\ln S_T) \\
&= \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} (e^{sW+m} - K) h(W) dW \\
&= \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW - \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} K h(W) dW \\
&= \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-s)^2}{2}} dW - KN\left(\frac{m - \ln K}{s}\right)
\end{aligned} \tag{14-28}$$

$$= \int_{\frac{\ln K - m}{s} - s}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} h(W) dW - KN\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$= Se^{r(T-t)} N\left(\underbrace{\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{d_1}\right) - KN\left(\underbrace{\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{d_2}\right)$$

故此，对于一个无股息股票看涨期权的布莱克-斯科斯斯-莫顿定价公式：

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}[\max(S_T - X, 0)] = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{14-29}$$

其中，$d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，$d_2 = \dfrac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$。